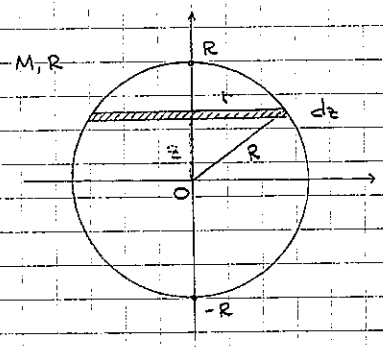
MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA



$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{Volume dischetto} = \pi r^2 dz = \pi\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 dz = \pi(R^2 - z^2)\,dz$$

$$dm = \rho \cdot \text{Vol dischetto} = \pi\rho(R^2 - z^2)\,dz$$

$$\text{Momento d'inerzia del dischetto} = \frac{1}{2}\,dm\,r^2 = \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - z^2)\,dz\,(R^2 - z^2) = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2\,dz$$

Facendo l'integrale si ricava il momento d'inerzia della sfera:

$$I_O(\text{sfera}) = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2\,dz = \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2\,dz = \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi\left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\rho\pi\left[R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5 - \left(-R^5 + \frac{2}{3}R^5 - \frac{1}{5}R^5\right)\right] =$$

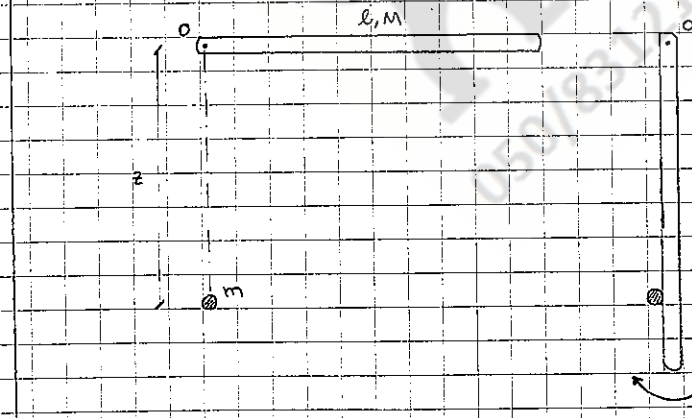
$$= \frac{1}{2}\rho\pi\left[R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5 + R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right] = \frac{1}{2}\rho\pi\left[2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi\left[\frac{30R^5 - 20R^5 + 6R^5}{15}\right] = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{16}{15}R^5 = \frac{16}{30}\pi\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}R^5 =$$

$$= \frac{2}{5}M \cdot R^2$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esercizio: SBARRA INCERNIERATA e PALLINA (urto anelastico)



Con la CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA si ottiene la velocità angolare ω_0 della sbarra un attimo prima dell'urto (già fatto nell'esercizio con urto elastico):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

$$I_{O(\text{pallina})} = I_O\,\omega_z = m z^2 \omega_z$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE:

$$I_{O(\text{asta})}\,\omega_0 = I_{O(\text{asta})}\,\omega_f + m v_f z \quad \text{con } (v_f = \omega_f \cdot z)$$

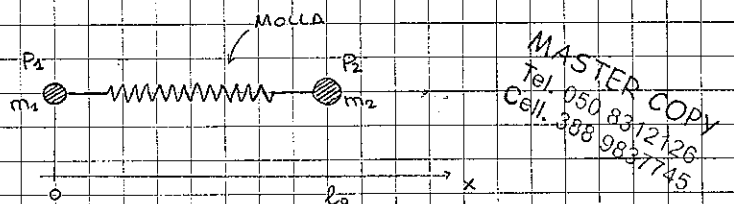
$$\rightarrow \frac{1}{3}M\ell^2\omega_0 = \frac{1}{3}M\ell^2\omega_f + m\omega_f z^2 \rightarrow \frac{1}{3}M\ell^2\omega_0 = \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + mz^2\right)\omega_f \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_f = \frac{\frac{1}{3}M\ell^2\omega_0}{\left(\frac{1}{3}M\ell^2 + mz^2\right)}$$

- DIMENSIONALMENTE È OK;
- SE m è piccola la sbarra dovrebbe avere sempre velocità angolare ω_0 → INFATTI È COSÌ!

esercizio: MASSE e MOLLA → una massa ha velocità iniziale V;

Prendiamo il sistema in figura, considerando che le uniche forze in gioco sono quelle dovute alla molla:



MASTER COPY
Tel. 050 83121 26
Cell. 388 98377 45

$t = 0$ ↓

$x_1(0) = 0$

$V_1(0) = 0$

$x_2(0) = l_0$

$V_2(0) = V$

→ Si determinino le leggi orarie $x_1(t)$ e $x_2(t)$?

EQUAZIONI DEL MOTO:

$$m_1 \ddot{x}_1 = K\left[(x_2 - x_1) - l_0\right]$$

allungamento della molla all'istante generico;

$$m_2 \ddot{x}_2 = -K\left[(x_2 - x_1) - l_0\right]$$

Moltiplichiamo rispettivamente per m_2 e m_1 e uniamo le due equazioni ottenute:

$$\begin{cases} m_2 m_1 \ddot{x}_1 = K\left[(x_2 - x_1) - l_0\right] m_2 \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 = K\left[(x_2 - x_1) - l_0\right] m_1 \end{cases}$$

Sottraendo avremo: $m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -K\left[(x_2 - x_1) - l_0\right](m_1 + m_2)$

⇒ poniamo $z = (x_2 - x_1) - l_0 \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \longrightarrow m_1 m_2 \ddot{z} = -K z (m_1 + m_2)$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{-K z (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \Rightarrow$$

ora indicando con K' → $\dfrac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$

$$\ddot{z} = -K' z$$

si ottiene l'eq. differenziale

Che ha per soluzione generale:

$$z = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{K'}$$

$$\rightarrow (x_2 - x_1) - l_0 = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Osserviamo ora la QUANTITÀ DI MOTO, dato che si conserva lungo x:

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = Q_i = \text{costante} \ldots \text{e cioè} \rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \text{costante}$$

→ e integrando otteniamo una seconda equazione ⟶ $m_1 x_1 + m_2 x_2 = Q_i t + C$

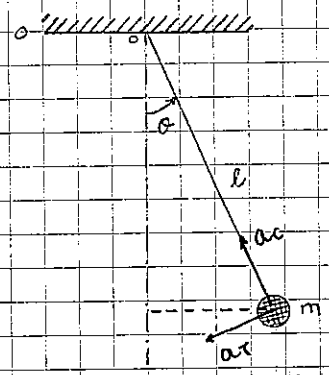
Siamo di fronte ora ad un sistema di 2 EQUAZIONI in 2 INCOGNITE, nelle quali compaiono le costanti: φ, C, A;

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{Q_i t + C - m_2 l_0 + A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{m_1 + m_2}$$

$$x_2 = \frac{Q_i t + C + m_2 l_0 + A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{m_1 + m_2}$$

* Per la determinazione delle costanti si sfruttano le condizioni iniziali;

esercizio: -PENDOLO → Accelerazione max e θ per a_{MAX}:



CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (x trovare ω):

$$mgl\cos\theta = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \rightarrow mgl\cos\theta = \frac{1}{2} ml^2\omega^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2g\cos\theta}{l} = \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g\cos\theta}{l}}$$

$$a_c = \omega^2 l = 2g\cos\theta$$

2ª EQUAZIONE CARDINALE: $\alpha = \frac{a_T}{l}$

$$mgl\,sen\theta = I_O\,\alpha \rightarrow mgl\,sen\theta = ml^2\,\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow mgl\,sen\theta = ml^2\frac{a_T}{l} \rightarrow g\,sen\theta = a_T$$

$$\Rightarrow a_{pendolo} = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{g^2 sen^2\theta + 4g^2\cos^2\theta} = g\sqrt{sen^2\theta + 4\cos^2\theta} =$$

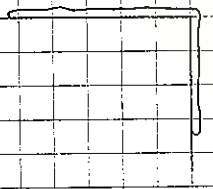
$$= g\sqrt{\underbrace{sen^2\theta + \cos^2\theta}_{=1} + 3\cos^2\theta} = g\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

⇒ l'accelerazione del pendolo è quindi MAX quando $\theta = 0$!

⇒ e vale: $a_{pendolo}(\theta=0) = \sqrt{1+3}\cdot g = g\sqrt{4} = 2g = a_{MAX}$

esercizio:

Una corda omogenea è posata in parte sopra una superficie orizzontale scabra, mentre l'altra restante, una frazione x dell'intera corda, pende nel vuoto. Se il coefficiente di attrito tra la corda e la superficie è $\mu_s = 0{,}2$, al di sopra di quale valore di x la corda non resta in equilibrio?



Indicando con m la massa dell'intera corda avremo che la FORZA D'ATTRITO è:

$$(1-x)\cdot m\cdot g\cdot \mu_s = F_A$$

Mentre la forza peso della parte pendente della corda è:

$$x\cdot m\cdot g$$

La corda non resta in equilibrio se si verifica che:

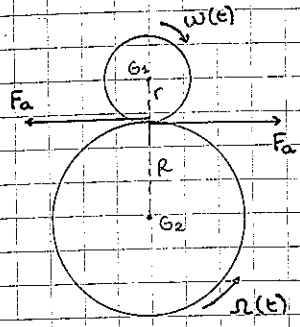
$x\cdot m\cdot g > (1-x)\,m\cdot g\cdot\mu_s \Rightarrow x > (1-x)\mu_s \Rightarrow$ quindi si ha che:

$x > \mu_s - x\mu_s$ da cui otteniamo: $x > \frac{\mu_s}{1+\mu_s} = \boxed{0{,}167}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

esercizio:

Si hanno due dischi o cilindri su di un piano, il più piccolo di raggio r che ruota con una velocità angolare ω_0 e il più grande di raggio R, fermo. Inizialmente sono lontani, poi li avviciniamo in modo che il primo, a contatto con il secondo, faccia girare quest'ultimo. Non sono ruote dentate, tra i due c'è un coefficiente di attrito μ.
Che velocità finali avranno i due cilindri se li mettiamo in contatto come descritto sopra per un tempo infinito?



$I_G = \frac{1}{2} m r^2$ $\quad F_a = \mu N$

2ª EQ. CARDINALE per entrambi i corpi:

- $-\mu N r = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\omega}$

$$\dot{\omega} = \frac{-2\mu N r}{m r^2} = -\frac{2\mu N}{m r}$$

Si fa la formula della velocità!

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu N}{m r} t$$

- $\mu N R = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\Omega}$

$$\dot{\Omega} = \frac{2\mu N R}{M R^2} = \frac{2\mu N}{MR} \longrightarrow \Omega(t) = \int_0^t \Omega_0 + \frac{2\mu N}{MR} t = \frac{2\mu N}{MR} t$$

Le due leggi trovate sono valide solo fino a che si ha scorrimento tra le due.
Dopo un tempo infinito le velocità angolari restano costanti nel tempo e le ruote si muovono di moto uniforme.
Quindi applichiamo la condizione SENZA STRISCIAMENTO:

$$\omega(t) r = \Omega(t) R \qquad \omega_0 r - \frac{2\mu N}{m} t = \frac{2\mu N}{M} t$$

$$\omega_0 r = 2\mu N \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) t \longrightarrow \text{trovo } t^* \text{ (tempo dopo il quale non si ha più strisciamento)}$$

$$\boxed{t^* = \frac{\omega_0 r}{2\mu N} \frac{mM}{M+m}}$$

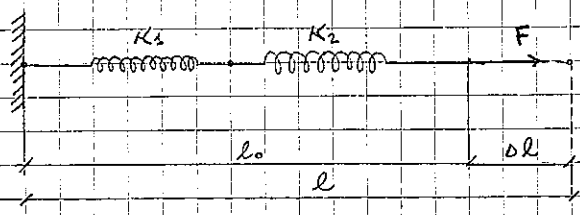
Ora trovo le velocità finali dopo molto tempo, cioè in t^*, perché poi rimangono costanti all'infinito:

$$\omega_f = \omega_0 - \frac{2\mu N}{m r} \frac{\omega_0 r}{2\mu N} \frac{mM}{M+m} = \omega_0 - \frac{\omega_0 M}{M+m} \longrightarrow \boxed{\omega_f = \frac{m\omega_0}{m+M}}$$

$$\Omega_f = \frac{2\mu N}{MR} \frac{\omega_0 r}{2\mu N} \frac{mM}{M+m} = \frac{\omega_0 r}{R} \frac{m}{m+M} \longrightarrow \boxed{\Omega_f = \frac{\omega_0 r}{R} \frac{m}{m+M}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MOLLE IN SERIE E IN PARALLELO



MOLLE IN SERIE

$$F = K_{TOT}\,\Delta l = K_{TOT}(l - l_0)$$

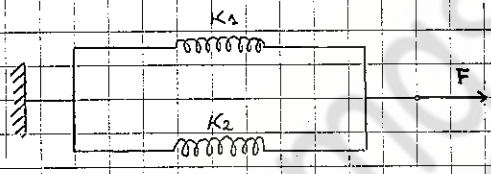
$$(l - l_0) = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta l_1 = \frac{F}{K_1} \qquad \Delta l_2 = \frac{F}{K_2}$$

$$\Rightarrow F = K_{TOT}\left(\frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}\right) =$$

$$= K_{TOT}\,F\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{K_{TOT}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$



MOLLE IN PARALLELO

$$F = K_1\,\Delta l + K_2\,\Delta l = \Delta l\,(K_1 + K_2)$$

$$F = K_{TOT}\,\Delta l$$

$$K_{TOT}\,\Delta l = (K_1 + K_2)\,\Delta l \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{K_{TOT} = K_1 + K_2}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745